МНОГОМЕРНЫЙ ИНТЕГРАЛ И ОБЪЕМЫ МНОГОМЕРНЫХ ТЕЛ

(В дополнение к упражнениям)

Математический анализ, четвертый семестр, 2012/13 уч. год

Лектор профессор В.А.Зорич

1. *Начальные наблюдения.*

a. Многомерный (n-мерный) куб $I^n = \{x \in \mathbb{R}^n | 0 \le x^i \le 1, i = 1, ..., n\}$ имеет объём (n-меру) 1. Каковы его диаметр, радиус вписанного шара и радиус описанного шара?

b. С тысячемерного арбуза, имеющего форму шара радиуса 1 метр, срезали корку толщины 1 сантиметр. Покажите, что осталось меньше тысячной доли исходного арбуза.

c. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, как известно, можно ввести иную норму вектора, например, положив $||x|| = |x^1| + ... + |x^n|$. В стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ (при $n = 2$) изобразите единичный шар в этой норме и покажите, что евклидов объём такого шара как области в $\mathbb{R}^n$ равен $\frac{2^n}{n!}$.

2. *Полярные координаты.*

a. Если каждую точку множества E, лежащего в пространстве $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, соединить отрезком с фиксированной точкой $p \in \mathbb{R}^n$, то получится фигура, называемая конусом с вершиной p и основанием E. Высота конуса — это расстояние от вершины до гиперплоскости, в которой лежит основание конуса. Покажите, что (n-мерный) объём V конуса в $\mathbb{R}^n$ вычисляется по формуле $V = \frac{1}{n} h S(E)$, где h — высота конуса, а $S(E)$ — "площадь"($(n-1)$-мера) основания.

b. Покажите, что объём $V_n(r)$ n-мерного шара $B^n(r)$ радиуса r в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и площадь $\boldsymbol{\sigma}_{n-1}(r)$ ($(n-1)$-мера) ограничивающей его сферы $S^{n-1}(r)$ связаны соотношением $V_n(r) = \frac{1}{n} r \boldsymbol{\sigma}_{n-1}(r)$.

В частности, объём $v_n = V_n(1)$ единичного n-мерного шара $B^n(1)$ (шара радиуса 1) в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и площадь $\sigma_{n-1} = \boldsymbol{\sigma}_{n-1}(1)$ ($(n-1)$-мера) ограничивающей его единичной сферы $S^{n-1}(1)$ связаны соотношением $v_n = \frac{1}{n}\sigma_{n-1}$ или $\sigma_{n-1} = n v_n$.

c. Покажите, что дифференциал $dV_n(r)$ объёма $V_n(r)$ шара $B^n(r)$ радиуса r в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, отвечающий приращению dr радиуса шара, вычисляется по формуле $dV_n(r) = \boldsymbol{\sigma}_{n-1}(r) dr$, где, как и выше, $\boldsymbol{\sigma}_{n-1}(r)$ — площадь сферы $S^{n-1}(r)$ радиуса r. (Это обстоятельство очень облегчает вычисления при переходе к полярным координатам в многомерных интегралах.)

d. Покажите теперь, что $\frac{dV_n}{dr}(r) = \boldsymbol{\sigma}_{n-1}(r)$, а учитывая, что $V_n(r) = V_n(1)r^n = v_n r^n$ и $\boldsymbol{\sigma}_{n-1}(r) = \boldsymbol{\sigma}_{n-1}(1)r^{n-1} = \sigma_{n-1}r^{n-1}$, получите вновь результаты, указанные в пункте b этой задачи.

e. С учётом только что сделанного наблюдения, покажите, что результат пункта c можно конкретизировать, записав, что $dV_n(r) = \boldsymbol{\sigma}_{n-1}(r)dr = \sigma_{n-1}r^{n-1}dr$.

3. *Шар и сфера в евклидовом n-мерном пространстве* $\mathbb{R}^n$.

a. Покажите, что $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$, вычислив интеграл от функции $e^{-(x_1^2+x_2^2)}$ по всей плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных (x_1, x_2), исчерпывая $\mathbb{R}^2$ сначала расширяющимися квадратами, а потом кругами. В первом случае воспользуйтесь сведением двойного интеграла к повторному ("теорема Фубини"), а во втором перейдите к полярным координатам и вычислите явно возникающий интеграл. Сравните результаты и получите указанный ответ.

b. Повторите описанную процедуру в n-мерном случае, применительно к функции $e^{-(x_1^2+\ldots+x_n^2)}$ и получите равенство

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^n = \sigma_{n-1}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}r^{n-1}dr, \tag{1}$$

где, как и в задачах выше, σ_{n-1} — площадь ($(n-1)$-мера) единичной сферы $S^{n-1}(1)$ в $\mathbb{R}^n$.

c. Получите теперь формулы

$$\sigma_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \qquad v_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})} \tag{2}$$

для площади единичной сферы и объёма единичного шара в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

d. Покажите, что при $n \gg 1$ имеется асимптотика $v_n \simeq \left(\sqrt{\frac{2\pi e}{n}}\right)^n$.

e. Покажите, что шар единичного объёма в $\mathbb{R}^n$ имеет радиус $r_n = v_n^{-\frac{1}{n}}$ и, следовательно, $r_n \simeq \sqrt{\frac{n}{2\pi e}}$ при $n \gg 1$.

4. *Шар, сфера и нормальный закон распределения вероятностей.*

a. Пользуясь полученными в предыдущей задаче сведениями, проверьте, что при $n \to \infty$ площадь ($(n-1)$-мера) экваториального сечения n-мерного шара объёма 1 стремится к $\sqrt{e}$. (Речь идёт о сечении гиперплоскостью, проходящей через центр шара. Можно воспользоваться тем, что $v_{n-1}r_n^{n-1} = v_{n-1}v_n^{-\frac{n-1}{n}}$.)

b. Если шар $B^n(r)$ радиуса r сечётся гиперплоскостью, отстоящей на расстоянии $x \le r$ от центра шара, то в сечении получается шар $B^{n-1}(\sqrt{r^2 - x^2})$ размерности $n-1$ и радиуса $\sqrt{r^2 - x^2}$. Покажите, что если исходный n-мерный шар имел объём 1, то площадь ($(n-1)$-мера) рассмотренного сечения при $n \to \infty$ асимптотически ведёт себя как $\sqrt{e}\left(1 - \frac{x^2}{r_n^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$, а поскольку $r_n \simeq \sqrt{\frac{n}{2\pi e}}$, то в пределе получаем $\sqrt{\mathrm{e}}\exp(-\pi e x^2)$.

c. Из полученного результата можно сделать много полезных заключений. Например, что почти весь объём такого шара при $n \gg 1$ сосредоточен в относительно малой окрестности экваториального сечения, а почти вся площадь многомерной сферы находится в окрестности экватора. В частности, если взять случайно и независимо пару единичных векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$, то при $n \gg 1$ они с большой вероятностью окажутся почти ортогональными. Оцените вероятность того, что модуль их скалярного произведения окажется больше ε.

d. Если шар $B^n(r_n) \subset \mathbb{R}^n$ объёма 1 спроектировать на прямую, то на прямой масса (мера) шара после такого проектирования, конечно, распределится неравномерно. Покажите, что в пределе при $n \to \infty$ получится нормальное распределение.

e. Как мы уже знаем, почти весь объём многомерного шара сосредоточен в малой окрестности граничной сферы. Это значит, что проектирование многомерной сферы на прямую тоже в пределе даёт нормальное распределение на этой прямой. Проверьте это.

f. Пусть имеется однородный газ, состоящий из $n \gg 1$ молекул, и пусть E_n их совокупная кинетическая энергия $\frac{mv_1^2}{2} + \ldots + \frac{mv_n^2}{2} = E_n$. Взаимодействием молекул можно пренебречь, если газ не слишком сжат, а величину E_n естественно тогда считать пропорциональной количеству n молекул ($E_n \simeq \sigma^2 n$). Используя полученный в пункте e результат, получите закон Максвелла распределения вероятности значений скорости молекул, а также закон распределения их энергии. (Это вопрос об одной, например, первой молекуле. Вопрос, конечно, непосредственно связан с проектированием сферы на координатную ось.)

g. Проектирование точки $x = (x^1, \ldots., x^n) \in \mathbb{R}^n$ на первую координатную ось сводится к скалярному произведению вектора $(x^1, \ldots., x^n)$

и вектора $(1,0,....,0)$. С равным успехом можно было бы рассмотреть проекцию на любую прямую с направляющим единичным вектором $(\alpha_1,...,\alpha_n)$, например, вектором $(\frac{1}{\sqrt{n}},...,\frac{1}{\sqrt{n}})$. Запишите результат пункта e в этом случае и убедитесь, что он соответствует центральной предельной теореме теории вероятностей.